

УДК 517.5

РАЦИОНАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КУСОЧНО-ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Н. В. ГРИБ

The speed of approximation of 2π -periodic piecewise convex functions by summational rational operators of Jackson's type is found.

Сумматорные рациональные операторы типа Джексона на прямой впервые были построены Е.А. Ровбой [1,2]. Аналогичные операторы для окружности построены автором в работе [3], где они использовались для аппроксимации гельдеровских функций ограниченной вариации. В настоящей работе исследуется сходимость задаваемых сумматорными рациональными операторами типа Джексона последовательностей рациональных функций к непрерывным 2π -периодическим кусочно-выпуклым функциям.

По заданной последовательности комплексных чисел $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $0 \leq |\alpha_k| < 1$ определим произведение Бляшке

$$\pi_n(z) = \prod_{k=1}^n \frac{z - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k}z}.$$

Уравнение $\pi_n^2(z) - 1 = 0$ имеет $2n$ различных корней $z_j = e^{iu_j}$, $j = 1..2n$, расположенных на окружности $|z| = 1$. Введем следующие обозначения

$$\Phi_n(u) = \arg \pi_n(e^{iu}), \quad K_n(z, \xi) = \left(\frac{\pi_n(z)}{\pi_n(\xi)} + \frac{\pi_n(\xi)}{\pi_n(z)} - 2 \right) \frac{z\xi}{(z - \xi)^2},$$

$$\rho_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=1} K_n(z, \xi) \frac{d\xi}{i\xi}, \quad \psi_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_{|\xi|=1} K_n^2(z, \xi) \frac{d\xi}{i\xi}.$$

Легко проверить, что при $z = e^{iu}$, $\xi = e^{iv}$ верны равенства

$$K_n(z, \xi) = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\Phi_n(v) - \Phi_n(u))}{\sin^2 \frac{v-u}{2}}, \quad \rho_n(z) = \frac{z\pi'_n(z)}{\pi_n(z)} = \Phi'_n(u) = \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{(1 - |\alpha_k|)^2 + 4|\alpha_k| \sin^2 \frac{u - \arg \alpha_k}{2}}. \quad (1)$$

В пространстве $C(T)$ непрерывных на единичной окружности функций введем сумматорный рациональный оператор типа Джексона

$$D_{4n-2}(z, f) = \frac{1}{\psi_n(z)} \sum_{j=1}^{2n} \frac{K_n^2(z, z_j)}{\rho_n(z_j)} f(z_j), \quad (2)$$

значениями которого являются алгебраические рациональные функции степени не выше $4n - 2$. Вместе с оператором D_{4n-2} при $z = e^{iu}$, $f(e^{iu}) = \varphi(u)$ рассмотрим оператор $D_{4n-2}^*(u, \varphi) := D_{4n-2}(e^{iu}, f)$, действующий в пространстве $C_{2\pi}$. Из (1) и (2) следует, что, с учетом обозначения $\Psi_n(u) = \psi_n(e^{iu})$, оператор D_{4n-2}^* представим в форме

$$D_{4n-2}^*(u, \varphi) = \frac{1}{\Psi_n(u)} \sum_{j=1}^{2n} \frac{\varphi(u_j)}{\Phi'_n(u_j)} \frac{\sin^4 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\sin^4 \frac{u-u_j}{2}}.$$

Лемма 1. Операторы D_{4n-2} и D_{4n-2}^* точны на константах.

Доказательство. Не ограничивая общности, докажем точность оператора D_{4n-2} для $f(z) = 1$. Вычислим контурный интеграл

$$J(z) = \frac{1}{2\pi\psi_n(z)} \int_{\gamma} \frac{K_n^2(z, \xi)q(\xi)d\xi}{\xi}, \quad q(\xi) = i \frac{\pi_n^2(\xi) + 1}{\pi_n^2(\xi) - 1},$$

где γ – замкнутый контур, окружающий точки $\{\alpha_k, 1/\overline{\alpha_k}\}_{k=1}^n$, а точки $\{z_j\}_{j=1}^{2n}$ находятся во внешности γ . Считаем для определённости, что все α_k различны. После некоторых подсчетов выясняем, что $q(\alpha_k) = -q(1/\overline{\alpha_k}) = i$, $q'_n(\alpha_k) = q'_n(1/\overline{\alpha_k}) = 0$. Поэтому при вычислении $J(z)$ по внутренности контура γ будем иметь

$$\begin{aligned} J(z) &= \frac{2\pi i}{2\pi\psi_n(z)} \sum_{k=1}^n \left(\operatorname{Res}_{\alpha_k} \frac{K_n^2(z, \xi)q(\xi)}{\xi} + \operatorname{Res}_{1/\overline{\alpha_k}} \frac{K_n^2(z, \xi)q(\xi)}{\xi} \right) = \\ &= \frac{2\pi i}{2\pi\psi_n(z)} \sum_{k=1}^n \left(\operatorname{Res}_{\xi=\alpha_k} \frac{K_n^2(z, \xi)}{i\xi} - \operatorname{Res}_{\xi=1/\overline{\alpha_k}} \frac{K_n^2(z, \xi)}{i\xi} \right) = \frac{1}{\pi\psi_n(z)} \int_{|\xi|=1} \frac{K_n^2(z, \xi)}{i\xi} d\xi = 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Подынтегральная функция в $J(z)$ имеет простые полюсы в точках $\{z_j\}_{j=1}^{2n}$, нуль третьего порядка на бесконечности, поэтому при вычислении интеграла по внешности контура γ получим

$$\begin{aligned} J(z) &= \frac{-2\pi i}{2\pi\psi_n(z)} \left(\sum_{j=1}^{2n} \operatorname{Res}_{\xi=z_j} \frac{K_n^2(z, \xi)q(\xi)}{\xi} + \operatorname{Res}_{\xi=\infty} \frac{K_n^2(z, \xi)q(\xi)}{\xi} \right) = \\ &= \frac{1}{\psi_n(z)} \sum_{j=1}^{2n} \operatorname{Res}_{\xi=z_j} \frac{K_n^2(z, \xi)(\pi_n^2(\xi) + 1)}{\xi(\pi_n^2(\xi) - 1)} = \frac{1}{\psi_n(z)} \sum_{j=1}^{2n} K_n^2(z, z_j) \lim_{\xi \rightarrow z_j} \frac{\pi_n^2(\xi) + 1}{\xi(\pi_n^2(\xi) - 1)'} = \\ &= \frac{1}{\psi_n(z)} \sum_{j=1}^{2n} K_n^2(z, z_j) \lim_{\xi \rightarrow z_j} \frac{\pi_n^2(\xi) + 1}{2\pi_n^2(\xi)\rho_n(\xi)} = \frac{1}{\psi_n(z)} \sum_{j=1}^{2n} \frac{K_n^2(z, z_j)}{\rho_n(z_j)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Соотношения (3) и (4) доказывают утверждение леммы.

Замечание 1. Аналогично при $|z| = 1$ устанавливается тождество

$$\frac{1}{2\rho_n(z)} \sum_{j=1}^{2n} \frac{K_n(z, z_j)}{\rho_n(z_j)} = 1.$$

Лемма 2. [4, стр. 320] Имеют место неравенства

$$\Psi_n(u) > (\Phi'_n(u))^3, \quad \Psi_n(u) > \frac{2}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{\left((1 - |\alpha_k|)^2 + 4|\alpha_k| \sin^2 \frac{u - \arg \alpha_k}{2} \right)^2}.$$

Назовем функцию $\varphi(u) \in C_{2\pi}$ простой, если она абсолютно непрерывна, равна нулю на дополнении отрезка $[a, b]$, $b - a \leq 2\pi$, называемого опорным, к отрезку $[(a+b)/2 - \pi, (a+b)/2 + \pi]$, и $\|\varphi'\|_{L_\infty} \leq (b-a)^{-1}$.

Лемма 3. Если $f(u) = \varphi_1(u) + \varphi_2(u)$, где $\varphi_1(u)$ и $\varphi_2(u)$ – простые функции с опорными отрезками $[\theta_1 - d_1, \theta_1 + d_1]$ и $[\theta_2 - d_2, \theta_2 + d_2]$, $\theta_2 + d_2 - \theta_1 + d_1 \leq 2\pi$, $\theta_2 - d_2 \geq \theta_1 + d_1$, то при подходящем выборе параметров $\{\alpha_k\}_1^n$ справедлива оценка

$$|f(u) - D_{4n-2}^*(u, f)| \leq \sum_{l=1}^2 \left(\frac{\frac{9}{\sqrt{\Psi_n(u)}} \left(1 - \left(1 - \frac{d_l}{\pi} \right)^2 \right)}{\frac{d_l^2}{\pi^2} + 4 \left(1 - \frac{d_l}{\pi} \right) \sin^2 \frac{u - \theta_l}{2}} + \frac{\frac{300}{\Psi_n(u)} \left(1 - \left(1 - \frac{d_l}{\pi} \right)^2 \right)}{\left(\frac{d_l^2}{\pi^2} + 4 \left(1 - \frac{d_l}{\pi} \right) \sin^2 \frac{u - \theta_l}{2} \right)^2} \right).$$

Доказательство. Выберем параметры $\{\alpha_k\}_1^n$ следующим образом: $\alpha_1 = (1 - d_1/\pi) e^{i\theta_1}$, $\alpha_2 = (1 - d_2/\pi) e^{i\theta_2}$, остальные параметры лежат на лучах $\arg z = \theta_1$, $\arg z = \theta_2$ и $0 \leq |\alpha_k| < 1$, $k = 3..n$. Пусть $E_u = \{j | j = 1..2n, |u - u_j| < 1/\sqrt[3]{\Psi_n(u)}\}$, $CE_u = \{1, 2, ..2n\} \setminus E_u$.

Если $u \in [\theta_1 - 10d_1, \theta_1 + 10d_1] \cup [\theta_2 - 10d_2, \theta_2 + 10d_2]$, то с учетом определения простой функции, свойств оператора D_{4n-2}^* , неравенства Коши-Буняковского и замечания 1 для $l = 1, 2$ будем иметь

$$\begin{aligned} |\varphi(u) - D_{4n-2}(u, f)| &\leq \frac{1}{\Psi_n(u)} \sum_{E_u} \frac{1}{2d_l \sqrt[3]{\Psi_n(u)}} \frac{\sin^4 \frac{1}{2} (\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\Phi'_n(u_j) \sin^4 \frac{u-u_j}{2}} + \\ &+ \frac{1}{\Psi_n(u)} \sum_{CE_u} \frac{\pi}{2d_l} \frac{|\sin^3 \frac{1}{2} (\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))|}{\Phi'_n(u_j) \sin^3 \frac{|u-u_j|}{2}} \leq \frac{1}{2d_l \sqrt[3]{\Psi_n(u)}} + \\ &+ \frac{\pi \sqrt{\Phi'_n(u)}}{2d_l \sqrt{\Psi_n(u)}} \sqrt{\sum_{j=1}^{2n} \frac{\sin^4 \frac{1}{2} (\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\Psi_n(u) \Phi'_n(u_j) \sin^4 \frac{u-u_j}{2}}} \sqrt{\sum_{j=1}^{2n} \frac{\sin^2 \frac{1}{2} (\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\Phi'_n(u) \Phi'_n(u_j) \sin^2 \frac{u-u_j}{2}}} = \\ &= \frac{1}{2d_l \sqrt[3]{\Psi_n(u)}} + \frac{\pi \sqrt{2}}{2d_l \sqrt[3]{\Psi_n(u)}} = \frac{\pi \sqrt{2} + 1}{2d_l \sqrt[3]{\Psi_n(u)}}. \end{aligned} \quad (5)$$

На основании соотношения

$$\frac{1}{d_l} = \frac{1}{\pi} \frac{d_l}{\frac{d_l^2}{\pi^2}} \leq \frac{1}{\pi^3} \left(100 + \frac{1}{\pi^2} \right) \frac{\frac{2d_l}{\pi} - \frac{d_l^2}{\pi^2}}{\frac{d_l^2}{\pi^2} + 100d_l^2} \leq \frac{1}{\pi^3} \left(100 + \frac{1}{\pi^2} \right) \frac{1 - \left(1 - \frac{d_l}{\pi}\right)^2}{\frac{d_l^2}{\pi^2} + 4 \left(1 - \frac{d_l}{\pi}\right) \sin^2 \frac{u-\theta_l}{2}}$$

при $u \in [\theta_1 - 10d_1, \theta_1 + 10d_1] \cup [\theta_2 - 10d_2, \theta_2 + 10d_2]$ из (5) имеем

$$|f(u) - D_{4n-2}^*(u, f)| < \frac{9}{\sqrt[3]{\Psi_n(u)}} \sum_{l=1}^2 \frac{1 - \left(1 - \frac{d_l}{\pi}\right)^2}{\frac{d_l^2}{\pi^2} + 4 \left(1 - \frac{d_l}{\pi}\right) \sin^2 \frac{u-\theta_l}{2}}. \quad (6)$$

Из определения простой функции видно, что ее модуль не превышает $1/2$, поэтому при $u \notin [\theta_1 - 10d_1, \theta_1 + 10d_1] \cup [\theta_2 - 10d_2, \theta_2 + 10d_2]$ установим

$$\begin{aligned} |\varphi(u) - D_{4n-2}(u, f)| &= \frac{1}{\Psi_n(u)} \sum_{j=1}^{2n} \frac{|f(u_j)| \sin^4 \frac{1}{2} (\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\Phi'_n(u_j) \sin^4 \frac{u-u_j}{2}} < \\ &< \frac{1}{2\Psi_n(u)} \sum_{l=1}^2 \sum_{\theta_l - d_l < u_j < \theta_l + d_l} \frac{25}{\Phi'_n(u_j) \left(\frac{(u-u_j)^2}{81\pi^2} + \frac{400}{81} \sin^2 \frac{9(u-\theta_l)}{20} \right)^2} < \\ &< \frac{1}{2\Psi_n(u)} \sum_{l=1}^2 \frac{25}{\left(\frac{d_l^2}{\pi^2} + 4 \left(1 - \frac{d_l}{\pi}\right) \sin^2 \frac{u-\theta_l}{2} \right)^2} \sum_{\theta_l - d_l < u_j < \theta_l + d_l} \frac{1}{\Phi'_n(u_j)}. \end{aligned} \quad (7)$$

При $x \in [\theta_l - d_l, \theta_l + d_l]$, $l = 1, 2$ из (1) имеем

$$\Phi'_n(x) > \frac{1 - \left(1 - \frac{d_l}{\pi}\right)^2}{\frac{d_l^2}{\pi^2} + 4 \left(1 - \frac{d_l}{\pi}\right) \sin^2 \frac{x-\theta_l}{2}} > \frac{\frac{d_l}{\pi}}{\frac{d_l^2}{\pi^2} + d_l^2} = \frac{\pi}{(1 + \pi^2) d_l}. \quad (8)$$

Так как все параметры $\{\alpha_k\}_1^n$ лежат на лучах $\arg z = \theta_1$, $\arg z = \theta_2$, функция $\Phi'_n(x)$ имеет локальные максимумы в точках θ_1 и θ_2 , локальные минимумы в некоторых точках τ_1 и τ_2 , где $\tau_1 < \theta_1$, $\theta_1 < \tau_2 < \theta_2$, причем $\Phi'_n(x)$ монотонна на каждом из отрезков $[\tau_1, \theta_1]$, $[\theta_1, \tau_2]$, $[\tau_2, \theta_2]$, $[\theta_2, \tau_1 + 2\pi]$. Из определения функции $\Phi_n(x)$ и расположения точек u_j понятно, что $\Phi_n(u_{j+1}) - \Phi_n(u_j) = \pi$, $j = 1..2n - 1$, с учетом этого при оценке последней суммы в (7) на промежутках убывания $\Phi'_n(x)$ будем заменять единицу на $\Phi'_n(\xi_j) (u_{j+1} - u_j) / \pi$, на промежутках возрастания

– на $\Phi'_n(\zeta_j)(u_j - u_{j-1})/\pi$, $\xi_j \in [u_j, u_{j+1}]$, $\zeta_j \in [u_{j-1}, u_j]$. Отношения $\Phi'_n(\zeta_j)/\Phi'_n(u_j)$, $\Phi'_n(\xi_j)/\Phi'_n(u_j)$ будут ограничены единицей в силу монотонности $\Phi'_n(x)$, для оценки же слагаемых, соответствующих ближайшим u_j к τ_1 и τ_2 , воспользуемся (8)

$$\sum_{\theta_l - d_l < u_j < \theta_l + d_l} \frac{1}{\Phi'_n(u_j)} \leq \sum \frac{\Phi'_n(\zeta_j)(u_j - u_{j-1})}{\pi \Phi'_n(u_j)} + \sum \frac{\Phi'_n(\xi_j)(u_{j+1} - u_j)}{\pi \Phi'_n(u_j)} + \frac{2(1 + \pi^2)d_l}{\pi} \leq \frac{2(2 + \pi^2)d_l}{\pi}. \quad (9)$$

Подставляя данную оценку в (7), получим

$$|\varphi(u) - D_{4n-2}^*(u, \varphi)| \leq \frac{300}{\Psi_n(u)} \sum_{l=1}^2 \frac{1 - \left(1 - \frac{d_l}{\pi}\right)^2}{\left(\frac{d_l^2}{\pi^2} + 4\left(1 - \frac{d_l}{\pi}\right) \sin^2 \frac{u - \theta_l}{2}\right)^2},$$

откуда в совокупности с (6) и следует утверждение леммы.

Лемма 4. Если $f(u) = \sum_{k=1}^n (a_k \varphi_k(u) + b_k \psi_k(u))$, где $a_k, b_k \geq 0$, $\varphi_k(u)$ и $\psi_k(u)$ – простые функции с опорными отрезками $[\theta_1 - c_k, \theta_1 + c_k]$ и $[\theta_2 - d_k, \theta_2 + d_k]$ соответственно, причем для каждой четверки $\theta_1, \theta_2, c_k, d_k$, $k = 1..n$ выполнены условия леммы 3, то существует такой набор параметров $\{\alpha_k\}_1^m$, $m \leq 4n$, что для определяемого ими оператора D_{4m-2}^* выполняется неравенство

$$|f(u) - D_{4m-2}^*(u, f)| < \frac{459}{n} \max \left\{ \sum_{k=1}^n a_k, \sum_{k=1}^n b_k \right\}.$$

Доказательство. Пусть $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$. Параметры выбираем по правилу

$$\alpha_{k,i,1} = \left(1 - \frac{c_k}{\pi}\right) e^{i\theta_1}, i = 1.. \left[\frac{a_k}{A_n} n\right] + 1, \alpha_{k,i,2} = \left(1 - \frac{d_k}{\pi}\right) e^{i\theta_2}, i = 1.. \left[\frac{b_k}{B_n} n\right] + 1, k = 1..n.$$

Их количество удовлетворяет соотношению $m \leq \sum_{k=1}^n (a_k n / A_n + b_k n / B_n + 2) = 4n$.

С учетом линейности оператора D_{4m-2}^* и лемм 1-3 для его уклонения от $f(u)$ будем иметь

$$\begin{aligned} |f(u) - D_{4m-2}^*(u, f)| &< \frac{9}{\sqrt[3]{\Psi_m(u)}} \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k \left(1 - \left(1 - \frac{c_k}{\pi}\right)^2\right)}{\left(\frac{c_k^2}{\pi^2} + 4\left(1 - \frac{c_k}{\pi}\right) \sin^2 \frac{u - \theta_1}{2}\right)^2} + \frac{b_k \left(1 - \left(1 - \frac{d_k}{\pi}\right)^2\right)}{\left(\frac{d_k^2}{\pi^2} + 4\left(1 - \frac{d_k}{\pi}\right) \sin^2 \frac{u - \theta_2}{2}\right)^2} \right) + \\ &+ \frac{300}{\Psi_m(u)} \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k \left(1 - \left(1 - \frac{c_k}{\pi}\right)^2\right)}{\left(\frac{c_k^2}{\pi^2} + 4\left(1 - \frac{c_k}{\pi}\right) \sin^2 \frac{u - \theta_1}{2}\right)^2} + \frac{b_k \left(1 - \left(1 - \frac{d_k}{\pi}\right)^2\right)}{\left(\frac{d_k^2}{\pi^2} + 4\left(1 - \frac{d_k}{\pi}\right) \sin^2 \frac{u - \theta_2}{2}\right)^2} \right) \leq \\ &\leq \frac{9 \max\{A_n, B_n\}}{n} + \frac{450 \max\{A_n, B_n\}}{n} = \frac{459 \max\{A_n, B_n\}}{n}, \end{aligned}$$

и доказательство леммы закончено.

Обратим внимание, что, например, в [4, стр. 311] доказывается аналогичная теорема для суммы произвольных простых функций. Аппаратом приближения также являются операторы Джексона, но интегрального типа, и уклонение оценивается несколько проще, чем в случае сумматорных операторов. В настоящей работе вместо тривиального интеграла нам приходится иметь дело с суммой из левой части неравенства (9). Для получения удовлетворительных оценок этой суммы на параметры, определяющие оператор (а, стало быть, и на приближаемые простые функции), приходится накладывать дополнительные ограничения.

Теорема 1. Если $f(u) \in C_{2\pi}$ четная и выпуклая на отрезке $[0, \pi]$, то при подходящем выборе параметров $\{\alpha_k\}_1^m$, $m \leq 4n - 4$ будет иметь место порядковая оценка

$$\|f(u) - D_{4m-2}^*(u, f)\| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Доказательство. Любая функция $f(u)$, удовлетворяющая условиям теоремы, может быть представлена в виде $f(u) = c + g(u)$ или $f(u) = c - g(u)$, где c – некоторая константа, а $g(u) \in C_{2\pi}$ – некоторая четная функция, выпуклая вниз на отрезке $[0, \pi]$ и $\inf_{0 \leq u < 2\pi} g(u) = 0$. Через $\{u_k\}_1^n$ и $\{v_k\}_1^n$, $0 \leq u_k, v_k \leq 2\pi$, $k = 1..n$ обозначим абсциссы точек, для которых $g(u_k) = g(0)k/n$ и $g(v_k) = g(\pi)k/n$. Рассмотрим четную 2π -периодическую ломаную $\varphi(u)$ с вершинами в точках $(\pm u_k, g(u_k) - g(0)k/n)$, $k = 1..n$ и $(\pm(\pi - v_k), g(v_k) - g(\pi)k/n)$, $k = 1..n$. Для $u \in (-v_1, -u_1) \cup (u_1, v_1)$ положим $\varphi(u) = 0$. Очевидно неравенство $\|g(u) - \varphi(u)\| \leq \|g\|/n$. Ломаную $\varphi(u)$ можно представить в виде линейной комбинации

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_k \varphi_k(u) + b_k \psi_k(u)), \quad a_k, b_k > 0, \quad \sum_{k=1}^{n-1} a_k \leq 2g(0), \quad \sum_{k=1}^{n-1} b_k \leq 2g(\pi) \quad (10)$$

простых треугольных функций $\varphi_k(u) = \max\{0, 1 - |u|/u_k\}/2$, $\psi_k(u) = \max\{0, 1 - |u - \pi|/(\pi - v_k)\}/2$, поэтому, согласно лемме 4 и (10), существует оператор D_{4m-2}^* , $m \leq 4n-4$ такой, что $\|\varphi(u) - D_{4m-2}^*(u, \varphi)\| \leq 918 \|g\|/n$. Для уклонения этого оператора от $g(u)$ имеем

$$\begin{aligned} \|g(u) - D_{4m-2}^*(u, f)\| &\leq \|g(u) - \varphi(u)\| + \|\varphi(u) - D_{4m-2}^*(u, \varphi)\| + \|D_{4m-2}^*(u, \varphi) - D_{4m-2}^*(u, g)\| \leq \\ &\leq \frac{\|g\|}{n} + \frac{918 \|g\|}{n} + \|D_{4m-2}^*(u, g - \varphi)\| \leq \frac{919 \|g\|}{n} + \|D_{4m-2}^*\| \cdot \|g(u) - \varphi(u)\| = \frac{920 \|g\|}{n}. \end{aligned}$$

Тогда с учетом линейности и точности оператора на константах окончательно находим

$$\|f(u) - D_{4m-2}^*(u, f)\| = \|c \pm g(u) - D_{4m-2}^*(u, c) \mp D_{4m-2}^*(u, g)\| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

В качестве следствия из теоремы 1 может быть получен результат В. А. Попова и П. П. Петрушева [5] о порядке приближения непрерывных на отрезке выпуклых функций алгебраическими рациональными функциями степени не выше n .

В заключение заметим, что аппроксимация линейных комбинаций простых функций интегральными рациональными операторами и ее приложения к нахождению порядковых оценок для наилучших рациональных приближений исследовались А. А. Пекарским [6]. В. Н. Русак и И. В. Рыбаченко [7] использовали линейные комбинации простых функций для приближения сумматорными рациональными операторами выпуклых функций пространства C_∞ .

Литература

1. **Ровба Е. А.** Интерполяция и ряды Фурье в рациональной аппроксимации. Гродно: ГрГУ, 2001.
2. **Ровба Е. А.** Сумматорные рациональные операторы типа Джексона // Мат. заметки. 1997. Т. 61, №6. С. 18-22.
3. **Гриб Н. В.** Аппроксимация сумматорными рациональными операторами типа Джексона в пространстве непрерывных 2π -периодических функций // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2011. №1. – С. 17-24.
4. **Lorentz G. G., Golitschek M. V., Makovoz Y.** Constructive Approximation. Advanced Problems. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
5. **Попов В. А., Петрушев П. П.** Точный порядок наилучшего равномерного приближения выпуклых функций рациональными функциями // Мат. сборник. 1977. Т. 103, №6. С. 285-292.
6. **Пекарский А. А.** Чебышевские рациональные приближения в круге, на окружности и на отрезке // Мат. сборник. 1987. Т. 133, №1. С. 86-102.
7. **Русак В. Н., Рыбаченко И. В.** Свойства функций и приближение сумматорными рациональными операторами на действительной оси. // Мат. заметки. 2004. Т. 76. №1. С. 111-118.